
Fluiddynamik Übung

Semesterwoche 13

- Lernziele Übung 2.5
- Wiederholung
 - Thermodynamische Beziehungen
 - Mach-Kegel
- Isentroper Stromfaden und senkrechter Verdichtungsstoss
- Lösen von Aufgaben

Lernziele Übung 2.5

- **Übungsserie 2.5** : Kompressible Strömungen → Kapitel 11
 - Isentroper Stromfaden
 - Senkrechter Verdichtungsstoss
 - Bezugsgrößen
- **Übungsstunde** : Konzepte und Anwendungen
 - Wiederholung Thermodynamik und Mach-Kegel
 - Eindimensionale Strömung
 - Isentroper Stromfaden
 - Senkrechter Verdichtungsstoss
 - Arbeiten mit Gleichungen und Tabellen
 - Lösungsstrategien

Thermodynamische Beziehungen

- Thermische Zustandsgleichung

- thermisch ideales Gas

$$p = \rho RT$$

- Van der Waals-Gas

$$(p + a\rho^2)(\rho^{-1} - b) = RT$$

- inkompressibles Gas

$$\rho = \textit{konst.}$$

- Kalorische Zustandsgleichung

- kalorisch ideales Gas

$$e = e(\rho, T) \text{ bzw. } h = h(p, T)$$

$$de = c_v(T) dT \text{ und } e = e(T)$$

$$dh = c_p(T) dT \text{ und } h = h(T)$$

- perfektes Gas

$$c_v = \textit{konst.} = f R/2$$

$$e = c_v T + e_0 \text{ bzw. } h = c_p T + h_0$$

$$R = c_p - c_v \text{ bzw. } \gamma = c_p/c_v$$

- 1. Hauptsatz der Thermodynamik

$$de = dq - p dv \quad \text{bzw.} \quad dh = dq + v dp$$

- 2. Hauptsatz der Thermodynamik

$$T ds = de + p dv \quad \text{bzw.} \quad T ds = dh - v dp$$

- Entropiebeziehungen in einem perfekten Gas

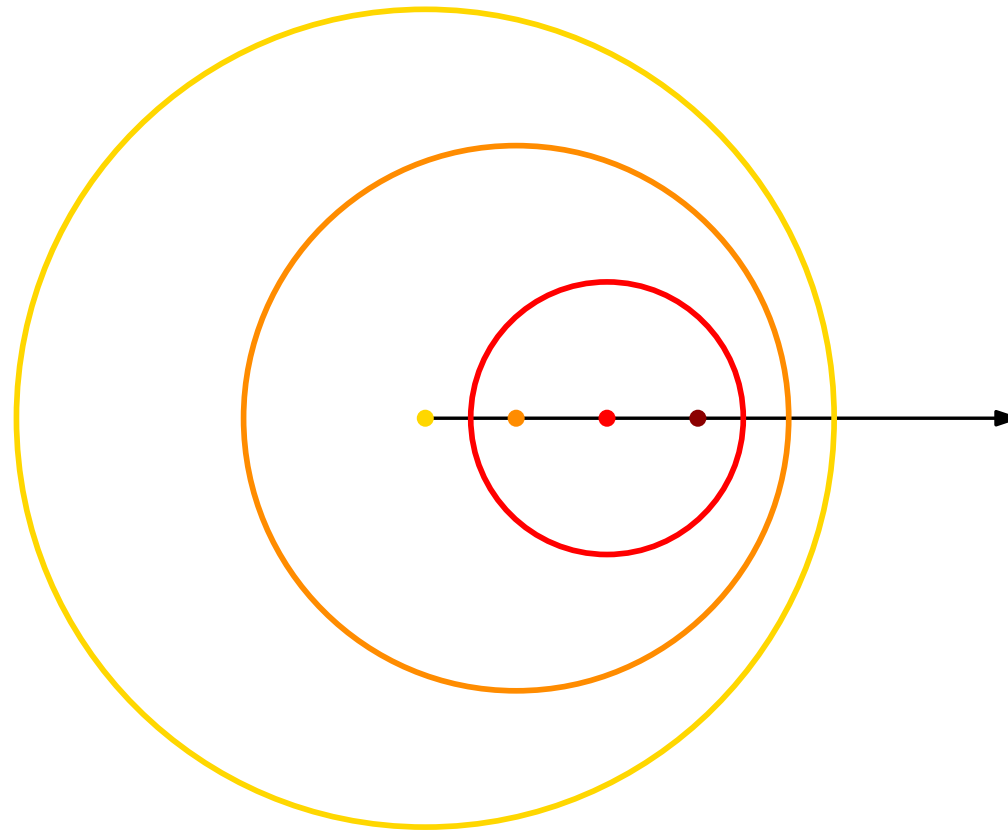
$$T ds = c_v dT + p dv \quad \Rightarrow \quad s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\gamma-1} \right]$$

$$T ds = c_p dT - v dp \quad \Rightarrow \quad s_2 - s_1 = c_p \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right]$$

- Isentropenbeziehungen in einem perfekten Gas

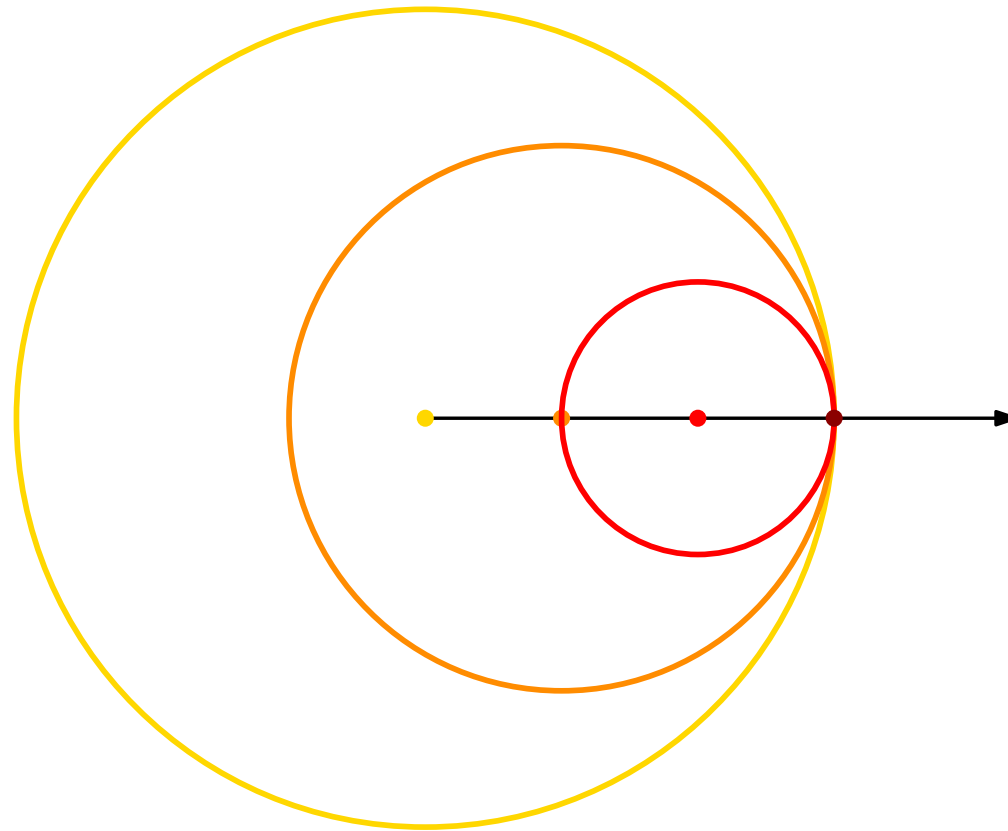
$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma}$$

Mach-Kegel



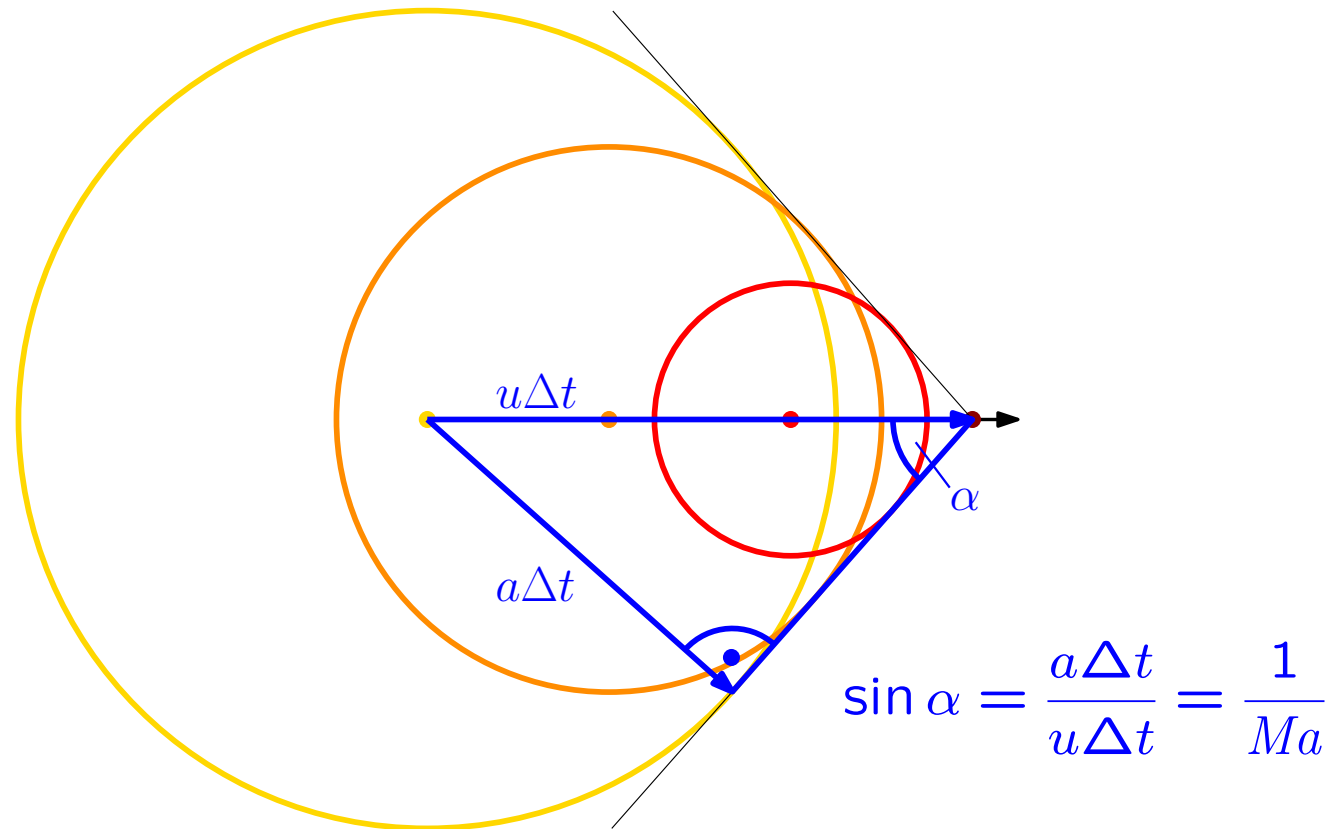
$Ma < 1$ (Unterschall)

Mach-Kegel



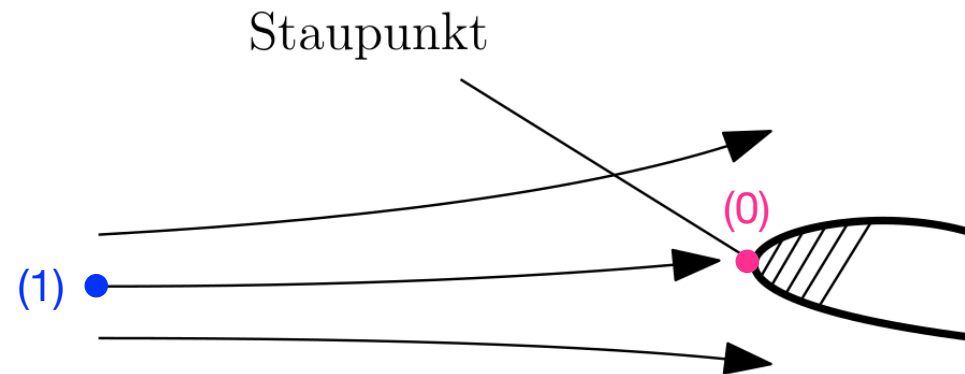
$$Ma = 1$$

Mach-Kegel



$Ma > 1$ (Überschall)

Isentroper Stromfaden



$$Ma_1 = 0.9$$

$$T_1 = 224 \text{ K}$$

$$p_1 = 0.178 \text{ bar}$$

$$\gamma = 1.4$$

$$T_0 = ?$$

$$p_0 = ?$$

ideales Gas, isentrope Strömung, Stromfadentheorie

Häufig benutzte Gleichungen

Skript Anhang E (S. 137f)

Isentrope Strömung

Abhängigkeit von Ruhegrößen und Mach-Zahl

$$\frac{T_0}{T} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)$$

$$\frac{a_0}{a} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

Tabellenwerte für $Ma < 1$

Skript Anhang E (S. 139)

Isentrope Unterschallströmung eines idealen Gases:
Zusammenhang zwischen Strömungsgrößen und Ruhegrößen
für $\gamma = 1.4$

| Ma | p/p_0 | ρ/ρ_0 | T/T_0 | A/A_* |
|------|---------|---------------|---------|----------|
| 0.00 | 1.00000 | 1.00000 | 1.00000 | ∞ |
| 0.02 | 0.99972 | 0.99980 | 0.99992 | 28.94213 |
| 0.04 | 0.99888 | 0.99920 | 0.99968 | 14.48149 |
| 0.06 | 0.99748 | 0.99820 | 0.99928 | 9.66591 |
| 0.08 | 0.99553 | 0.99681 | 0.99872 | 7.26161 |
| 0.10 | 0.99303 | 0.99502 | 0.99800 | 5.82183 |
| 0.12 | 0.98998 | 0.99284 | 0.99713 | 4.86432 |

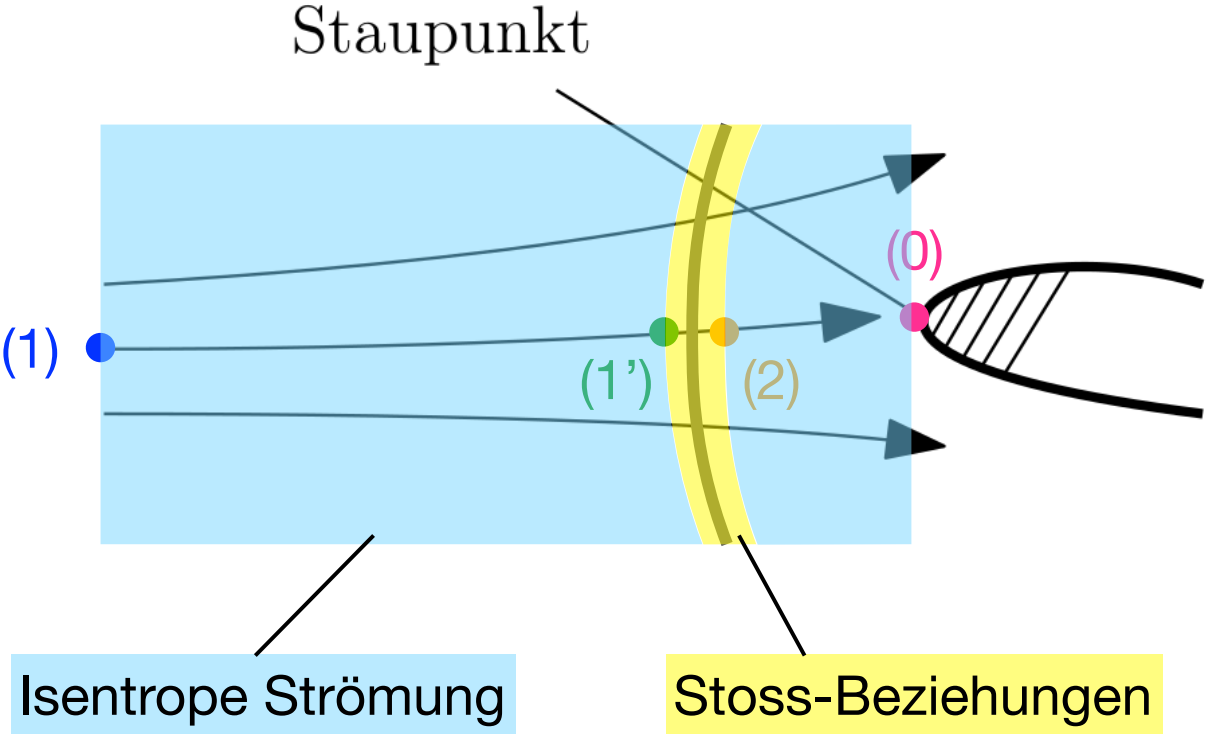
Tabellenwerte für $Ma > 1$

Skript Anhang E (S. 140ff)

Überschallströmung eines idealen Gases für $\gamma = 1.4$

| Isentrope Strömung | | | | | senkrechter Verdichtungsstoss | | | | |
|--------------------|---------|---------------|---------|---------|-------------------------------|---------|-----------|-----------------|-----------|
| Ma | p/p_0 | ρ/ρ_0 | T/T_0 | A/A_* | Ma_1 | Ma_2 | p_2/p_1 | ρ_2/ρ_1 | T_2/T_1 |
| 1.00 | 0.52828 | 0.63394 | 0.83333 | 1.00000 | 1.00 | 1.00000 | 1.00000 | 1.00000 | 1.00000 |
| 1.02 | 0.51602 | 0.62339 | 0.82776 | 1.00033 | 1.02 | 0.98052 | 1.04713 | 1.03344 | 1.01325 |
| 1.04 | 0.50389 | 0.61289 | 0.82215 | 1.00131 | 1.04 | 0.96203 | 1.09520 | 1.06709 | 1.02634 |
| 1.06 | 0.49189 | 0.60243 | 0.81651 | 1.00291 | 1.06 | 0.94445 | 1.14420 | 1.10092 | 1.03931 |
| 1.08 | 0.48005 | 0.59203 | 0.81085 | 1.00512 | 1.08 | 0.92771 | 1.19413 | 1.13492 | 1.05217 |
| 1.10 | 0.46835 | 0.58170 | 0.80515 | 1.00793 | 1.10 | 0.91177 | 1.24500 | 1.16908 | 1.06494 |
| 1.12 | 0.45682 | 0.57143 | 0.79944 | 1.01131 | 1.12 | 0.89656 | 1.29680 | 1.20338 | 1.07763 |
| 1.14 | 0.44545 | 0.56123 | 0.79370 | 1.01527 | 1.14 | 0.88204 | 1.34953 | 1.23779 | 1.09027 |
| 1.16 | 0.43425 | 0.55112 | 0.78795 | 1.01978 | 1.16 | 0.86816 | 1.40320 | 1.27231 | 1.10287 |

Senkrechter Verdichtungsstoss



Häufig benutzte Gleichungen

Skript Anhang E (S. 140)

| | Ma ₁ > 1 | Ma ₂ < 1 | |
|---|---------------------|---------------------|---|
| → | P ₁ | P ₂ | → |
| → | ρ ₁ | ρ ₂ | → |
| → | T ₁ | T ₂ | → |

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} Ma_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} Ma_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \left(\frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{Ma_1^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)$$

$$Ma_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_1^2}{\gamma Ma_1^2 - \frac{\gamma - 1}{2}} = 1 - \frac{Ma_1^2 - 1}{1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (Ma_1^2 - 1)}$$

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (Ma_1^2 - 1) \right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}} \left(\frac{(\gamma + 1) Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1) Ma_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Tabellenwerte

Skript Anhang E (S. 142ff)

Überschallströmung eines idealen Gases für $\gamma = 1.4$

| Isentrope Strömung | | | | | senkrechter Verdichtungsstoss | | | | |
|--------------------|---------|---------------|---------|---------|-------------------------------|---------|-----------|-----------------|-----------|
| Ma | p/p_0 | ρ/ρ_0 | T/T_0 | A/A_* | Ma_1 | Ma_2 | p_2/p_1 | ρ_2/ρ_1 | T_2/T_1 |
| 1.00 | 0.52828 | 0.63394 | 0.83333 | 1.00000 | 1.00 | 1.00000 | 1.00000 | 1.00000 | 1.00000 |
| 1.02 | 0.51602 | 0.62339 | 0.82776 | 1.00033 | 1.02 | 0.98052 | 1.04713 | 1.03344 | 1.01325 |
| 1.04 | 0.50389 | 0.61289 | 0.82215 | 1.00131 | 1.04 | 0.96203 | 1.09520 | 1.06709 | 1.02634 |
| 1.06 | 0.49189 | 0.60243 | 0.81651 | 1.00291 | 1.06 | 0.94445 | 1.14420 | 1.10092 | 1.03931 |
| 1.08 | 0.48005 | 0.59203 | 0.81085 | 1.00512 | 1.08 | 0.92771 | 1.19413 | 1.13492 | 1.05217 |
| 1.10 | 0.46835 | 0.58170 | 0.80515 | 1.00793 | 1.10 | 0.91177 | 1.24500 | 1.16908 | 1.06494 |
| 1.12 | 0.45682 | 0.57143 | 0.79944 | 1.01131 | 1.12 | 0.89656 | 1.29680 | 1.20338 | 1.07763 |
| 1.14 | 0.44545 | 0.56123 | 0.79370 | 1.01527 | 1.14 | 0.88204 | 1.34953 | 1.23779 | 1.09027 |
| 1.16 | 0.43425 | 0.55112 | 0.78795 | 1.01978 | 1.16 | 0.86816 | 1.40320 | 1.27231 | 1.10287 |

Beispiel zur Anwendung

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\text{berechnet}} = 1.183$$

Nearest Neighbour Interpolation

Tab. senkrechter Stoss $Ma_1 = 1.08$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{\text{Tabelle}} = 1.05217$$

$$\Rightarrow (Ma_2)_{\text{Tabelle}} = 0.92771$$

Aufgabe 3, Zwischentest 2, 2022

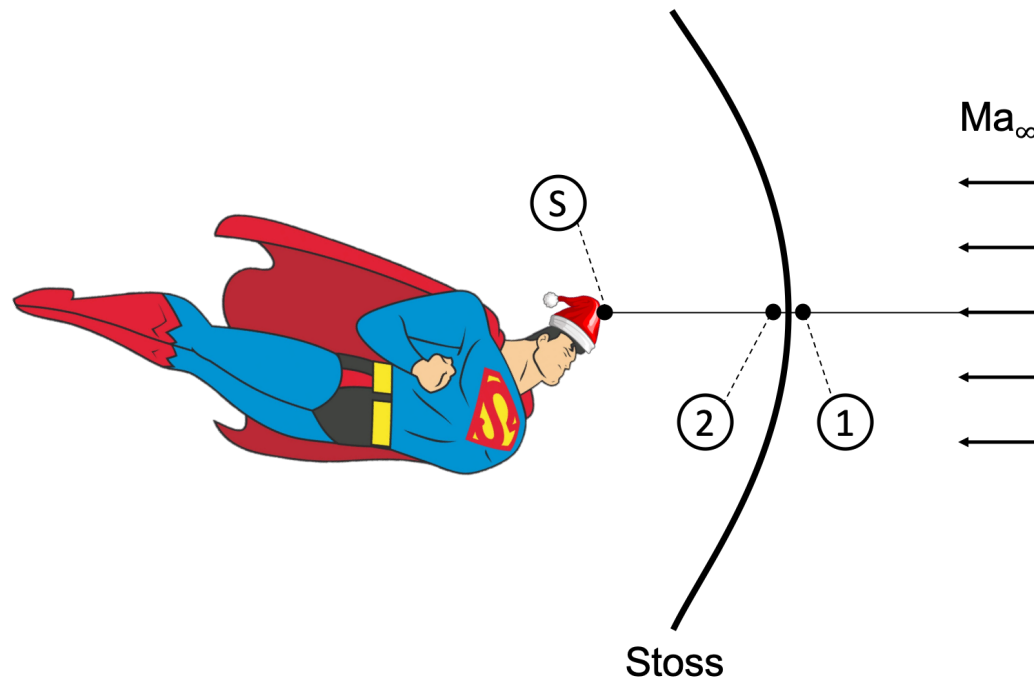
Durch einen Kanal mit unbekanntem veränderlichen Querschnitt strömt Luft. An einer unbekanntem Stelle im Kanal ein senkrechter Stoss auf.

An den Messstellen ① und ② (stromab von ①) werden folgende Grössen gemessen:

$$\begin{array}{lll} T_1 = 300 \text{ K} & p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa} & u_1 = 250 \text{ m/s} \\ T_2 = 270 \text{ K} & p_2 = 1.2 \cdot 10^5 \text{ Pa} & \end{array}$$

- Zeigen Sie rechnerisch, dass der Stoss zwischen den Messstellen ① und ② auftritt.
- Berechnen Sie die Geschwindigkeit u_2 an der Messstelle ②.
- Wie gross ist die Mach-Zahl unmittelbar vor dem Stoss?
- Berechnen Sie den Querschnitt, an dem der Stoss stattfindet, als Funktion von A_1 .

Aufgabe 3, Zwischentest 2, 2019



- a) Berechnen sie die maximale Mach-Zahl Ma_∞ , mit der Superman fliegen kann, bevor sich die Mütze auf seinem Kopf spontan entzünden kann.
- b) Mit welcher Geschwindigkeit u_∞ fliegt Superman?
- c) Wie lautet die Mach-Zahl Ma_2 und die Geschwindigkeit u_2 an der Stelle 2 direkt hinter dem Stoss?
- d) Berechnen Sie den maximalen Druck auf Supermans Kopf p_S .
- e) Bestimmen Sie die Entropieänderung $s_2 - s_1$ über den Stoss sowie zwischen der Stelle 2 direkt nach dem Stoss und dem Kopf von Superman S.
- f) Superman verbringt seine Weihnachtsferien auf einem fernen Planeten wo $\gamma = 1.3$ ist. Alle anderen gegebenen Größen seien gleich. Berechnen Sie für diesen Fall die maximale Mach-Zahl Ma_∞ und den maximalen Druck auf Supermans Kopf p_S .